المتحولات العشوائية

يمكن ربط كل تجربة بمقدار ما يدل على حدث معين، ويدعى هذا المقدار متحولاً عشوائياً، ويرمز للمتحولات العشوائية بأحرف إنكليزية كبيرة أما قيمها فيرمز لها بأحرف إنكليزية صغيرة. يوجد نوعان للمتحولات العشوائية حسب مجوعة قيمها، موضحة بالجدول الآتي:

المتحول العشوائي المتقطع	المتحول العشوائي المستمر
1- مجموعة قيمه تكون إما مجموعة منتهية أو قابلة للعد. 2- إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً عندئذ يعرف عليه دالة f تسمى دالة الاحتمال للمتغير X العشوائي المتقطع، وتحقق الخواص الآتية: - $f(x) \geq 0$ لأجل أي قيمة لـ X. - $\sum_X f(x) = 1$. - $p[X = x] = f(x)$.	1- مجموعة قيمه تكون مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد، بمعنى أخر مجموعة قيمه تأخذ من مجالات حقيقية. 2- إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً عندئذ يعرف عليه دالة f تسمى دالة الاحتمال للمتغير X العشوائي المستمر، وتحقق الخواص الآتية: - $f(x) \geq 0$ لأجل أي قيمة لـ X. - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. - $p[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$.

ملاحظات.

1- إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً مجموعة قيمه هي $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ و f دالة الاحتمال له فإنَّ:

$$p[X > x_r] = f(x_{r+1}) + f(x_{r+2}) + \ldots + f(x_n)$$
$$p[X \geq x_r] = f(x_r) + f(x_{r+1}) + f(x_{r+2}) + \ldots + f(x_n)$$
$$p[X < x_r] = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{r-1})$$
$$p[X \leq x_r] = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{r-1}) + f(x_r)$$

2- إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً و f دالة الاحتمال له فإنَّ:

$$p[a < X < b] = p[a \leq X \leq b] = p[a < X \leq b] = p[a \leq X < b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$p[X > a] = p[X \geq a] = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$p[X < a] = p[X \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

الأمثلة.

1- صندوق يحوي على خمس بطاقات تحمل الأرقام $1,2,3,4,5$، نسحب من الصندوق ثلاث بطاقات معاً، ولنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع البطاقات المسحوبة، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض، وبين الحدث الموافقة لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي X. واحسب احتمال كل من الأحداث الآتية:

- A حدث أن يكون مجموع البطاقات المسحوبة أكبر تماماً من 9.
- B حدث أن يكون مجموع البطاقات المسحوبة أكبر أو يساوي 9.
- C حدث أن يكون مجموع البطاقات المسحوبة أصغر تماماً من 9.
- D حدث أن يكون مجموع البطاقات المسحوبة أصغر أو يساوي 9.
- E حدث أن يكون مجموع البطاقات المسحوبة يساوي 9.

الحل.

لدينا $N(\Omega)=C_5^3=\dfrac{5!}{3!.(5-3)!}=\dfrac{5.4.3!}{3!.2!}=\dfrac{20}{2}=10$.

x	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

- لأجل $x=6$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,2,3)\}$.
- لأجل $x=7$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,2,4)\}$.
- لأجل $x=8$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,2,5),(1,3,4)\}$.
- لأجل $x=9$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,3,5),(2,3,4)\}$.
- لأجل $x=10$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,4,5),(2,3,5)\}$.
- لأجل $x=11$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(2,4,5)\}$.
- لأجل $x=12$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(3,4,5)\}$.

$$P(A)=P[X>9]=f(10)+f(11)+f(12)=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=P[X\geq 9]=f(9)+f(10)+f(11)+f(12)=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P(C)=P[X<9]=f(6)+f(7)+f(8)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P(D)=P[X\leq 9]=f(6)+f(7)+f(8)+f(9)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P(E)=P[X=9]=f(9)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

2- صندوق يحوي على ثلاث بطاقات تحمل الأرقام $1,2,3$، نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي مع إعادة، ولنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع البطاقتين المسحوبتين، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض، وبين الحدث الموافقة لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي X.

الحل.

لدينا حسب المبدأ الأساسي في العد فإنَّ $N(\Omega)=3\times3=9$، حيث إنَّ اختيار البطاقة الأولى يتم وفق ثلاث امكانيات واختيار البطاقة الثانية يتم وفق ثلاث امكانيات.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- لأجل $x=2$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,1)\}$.
- لأجل $x=3$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,2),(2,1)\}$.
- لأجل $x=4$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$.
- لأجل $x=5$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(3,2),(2,3)\}$.
- لأجل $x=6$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(3,3)\}$.

3- صندوق يحوي على ثلاث بطاقات تحمل الأرقام $1,2,3$، نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة، ولنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع البطاقتين المسحوبتين، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض، وبين الحدث الموافقة لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي X.

الحل.

لدينا حسب المبدأ الأساسي في العد فإنَّ $N(\Omega)=3\times2=6$، حيث إنَّ اختيار البطاقة الأولى يتم وفق ثلاث امكانيات واختيار البطاقة الثانية يتم وفق امكانيتين (أو $N(\Omega)=P_2^3=3\times2=6$).

x	3	4	5
$f(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

- لأجل $x=3$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,2),(2,1)\}$.
- لأجل $x=4$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(1,3),(3,1)\}$.
- لأجل $x=5$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(2,3),(3,2)\}$.

4- نلقي حجري نرد متماثلين تماماً، ولنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع الوجهين الظاهرين، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض.

الحل.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$

حيث يبين الجدول الآتي يبين مجموع الوجهين الظاهرين:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	×	4	5	6	7	8
3	×	×	6	7	8	9
4	×	×	×	8	9	10
5	×	×	×	×	10	11
6	×	×	×	×	×	12

5- نلقي حجري نرد متمايزين (حجر نرد مرتين متتاليتين)، ولنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع الوجهين الظاهرين، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض.

الحل.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

حيث يبين الجدول الآتي يبين مجموع الوجهين الظاهرين:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

6- في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية (ثلاث قطع نقود متمايزة)، لنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الوجه H (الصورة)، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض، وبين الحدث الموافقة لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي X.

الحل.

لدينا حسب المبدأ الأساسي في العد فإنَّ $N(\Omega)=2\times 2\times 2=8$.

$$\Omega=\{(T,T,T),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(H,H,H)\}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- لأجل $x=0$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(T,T,T)\}$.

- لأجل $x=1$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$.
- لأجل $x=2$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(H,H,T),(T,H,H),(H,T,H)\}$.
- لأجل $x=3$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(H,H,H)\}$.

7- في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقود متماثلة تماماً، لنفرض أنَّ X متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الوجه H (الصورة)، عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض، وبين الحدث الموافقة لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي X.

الحل.

لدينا: $\Omega=\{(T,T,T),(H,H,T),(H,T,T),(H,H,H)\}$. أي إنَّ $N(\Omega)=4$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

- لأجل $x=0$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(T,T,T)\}$.
- لأجل $x=1$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(H,T,T)\}$.
- لأجل $x=2$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(H,H,T)\}$.
- لأجل $x=3$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(H,H,H)\}$.

8- عائلة لديها اربعة أطفال، ولنفرض أنَّ X متحولاً عشوائياً يدل على عدد الإناث من الأطفال. عندئذ ارسم جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفروض، وبين الحدث الموافقة لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي X.

الحل.

إنَّ كل طفل من الأطفال إما أن يكون ذكراً B أو أنثى G وبالتالي حسب المبدأ الأساسي بالعد فإنَّ $N(\Omega)=2\times2\times2\times2=16$. أو يمكن أن نقول بما جنس الطفل له حالتين فقط فإنَّ $N(\Omega)=2^4=16$.

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(G,G,G,G)\\ ,(G,G,G,B),(G,G,B,G),(G,B,G,G),(B,G,G,G)\\ ,(G,G,B,B),(G,B,G,B),(B,G,G,B),(B,B,G,G),(B,G,B,G),(G,B,B,G)\\ ,(G,B,B,B),(B,G,B,B),(B,B,G,B),(B,B,B,G)\\ ,(B,B,B,B)\end{array}\right\}$$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

- لأجل $x=0$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(B,B,B,B)\}$.
- لأجل $x=1$ فإنَّ الحدث الموافق هو:

$$\{(G,B,B,B),(B,G,B,B),(B,B,G,B),(B,B,B,G)\}$$

- لأجل $x=2$ فإنَّ الحدث الموافق هو:

$$\{(G,G,B,B),(G,B,G,B),(B,G,G,B),(B,B,G,G),(B,G,B,G),(G,B,B,G)\}$$

- لأجل $x=3$ فإنَّ الحدث الموافق هو:

$$\{(G,G,G,B),(G,G,B,G),(G,B,G,G),(B,G,G,G)\}$$

- لأجل $x=4$ فإنَّ الحدث الموافق هو $\{(G,G,G,G)\}$.

9- لنفرض أنَّ X متغير عشوائي مستمر وأنَّ دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير تعطى بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases} x & ;\ 0\le x\le c \\ 2-x & ;\ c<x\le 2 \end{cases}$$

عين قيمة الثابت c ثم أوجد كل من $p[X=\frac{1}{2}], p[X<\frac{1}{2}], p[X\le\frac{1}{2}], p[X\ge\frac{1}{2}], p[X>\frac{1}{2}]$.

الحل.

بما أنَّ دالة توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X فإنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^c x\,dx+\int_c^2 (2-x)\,dx=1$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^c+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_c^2=\left[\frac{c^2}{2}-0\right]+\left[(4-2)-\left(2c-\frac{c^2}{2}\right)\right]=1$$

$$\frac{c^2}{2}+2-2c+\frac{c^2}{2}=1$$

$$c^2-2c+1=0\ \Rightarrow\ (c-1)^2=0\ \Rightarrow\ \boxed{c=1}$$

$$p[X>\frac{1}{2}]=p[X\ge\frac{1}{2}]=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx+\int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right]+\left[(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{7}{8}$$

$$p[X\le\frac{1}{2}]=p[X<\frac{1}{2}]=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

$$p[X=\frac{1}{2}]=0$$

10- لنفرض أنَّ X متغير عشوائي مستمر وأنَّ دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير تعطى بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & ;\ 1\le x\le c\\ 3-x & ;\ c<x\le 3\end{cases}$$

عين قيمة الثابت c ثم أوجد كل من $p[X=\frac{3}{2}],\ p[X<\frac{3}{2}],\ p[X\le\frac{3}{2}],\ p[X\ge\frac{3}{2}],\ p[X>\frac{3}{2}]$.

الحل.

بما أنَّ دالة توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X فإنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{1}^{3} f(x)\,dx=\int_{1}^{c}(2-x)\,dx+\int_{c}^{3}(3-x)\,dx=1$$

$$\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^c+\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_c^3=\left[\left(2c-\frac{c^2}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(3c-\frac{c^2}{2}\right)\right]=1$$

$$2c-\frac{c^2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}-3c+\frac{c^2}{2}=1\ \Rightarrow\ -c+3=1\Rightarrow\ \boxed{c=2}$$

$$p[X>\frac{3}{2}]=p[X\ge\frac{3}{2}]=\int_{\frac{3}{2}}^{3} f(x)\,dx=\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2-x)\,dx+\int_{2}^{3}(3-x)\,dx$$

$$=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^{2}+\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{2}^{3}=\left[(4-2)-\left(3-\frac{9}{8}\right)\right]+\left[\left(9-\frac{9}{2}\right)-(6-2)\right]$$

$$=2-\frac{15}{8}+\frac{9}{2}-4=\frac{5}{8}$$

$$p[X\le\frac{3}{2}]=p[X<\frac{3}{2}]=\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx=\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left(3-\frac{9}{8}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$p[X=\frac{3}{2}]=0$$

11- لنفرض أنَّ X متغير عشوائي مستمر وأنَّ دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير تعطى بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases}3-x & ;\ 2\le x\le c\\ 4-x & ;\ c<x\le 4\end{cases}$$

عين قيمة الثابت c ثم أوجد كل من $p[X=\frac{5}{2}],\ p[X<\frac{5}{2}],\ p[X\le\frac{5}{2}],\ p[X\ge\frac{5}{2}],\ p[X>\frac{5}{2}]$.

الحل.

بما أنَّ دالة توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X فإنَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{2}^{4} f(x)\,dx = \int_{2}^{c}(3-x)\,dx + \int_{3}^{4}(4-x)\,dx = 1$$

$$\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_2^c + \left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_c^4 = \left[\left(3c-\frac{c^2}{2}\right)-(6-2)\right]+\left[(16-8)-\left(4c-\frac{c^2}{2}\right)\right]=1$$

$$3c-\frac{c^2}{2}-4+8-4c+\frac{c^2}{2}=1 \Rightarrow -c+4=1 \Rightarrow \boxed{c=3}$$

$$p[X>\frac{5}{2}] = p[X \ge \frac{5}{2}] = \int_{\frac{5}{2}}^{4} f(x)\,dx = \int_{\frac{5}{2}}^{3}(3-x)\,dx + \int_{3}^{4}(4-x)\,dx$$

$$=\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{5}{2}}^{3} + \left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{15}{2}-\frac{25}{8}\right)\right]+\left[(16-8)-\left(12-\frac{9}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{35}{8}+8-\frac{15}{2}=\frac{5}{8}$$

$$p[X \le \frac{5}{2}] = p[X < \frac{5}{2}] = \int_{2}^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx = \int_{2}^{\frac{5}{2}}(3-x)\,dx = \left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_2^{\frac{5}{2}}$$

$$=\left(\frac{15}{2}-\frac{25}{8}\right)-(6-2)=\frac{3}{8}$$

$$p[X=\frac{5}{2}]=0$$

الأشعة العشوائية

نقول عن الشعاع (X,Y) إنه شعاع عشوائي إذا كانت كل مركبة من مركبتيه متحولاً عشوائياً، ويكون الشعاع العشوائي (X,Y) إما متقطعاً أو مستمراً.

أولاً. الشعاع العشوائي المتقطع. ليكن X,Y متحولين عشوائيين متقطعين، نقول عن الدالة $f(x,y)$ إنها دالة احتمالية مشتركة للمتحولين العشوائيين X,Y إذا حققت الشروط الآتية:

1- $0 \le f(x,y) \le 1$. 2- $\sum_X \sum_Y f(x,y) = 1$. 3- $P[X=x,Y=y] = f(x,y)$.

ملاحظة.

1- لأجل أي منطقة A من المستوي الحقيقي فإنَّ $P[(X,Y)\in A] = \sum_A f(x,y)$.

2- $f_Y(y_i) = \sum_X f(x,y_i) \quad , \quad f_X(x_i) = \sum_Y f(x_i,y)$.

3- $P[X=x,Y=y] = P[(X=x)\cap(Y=y)] = f(x,y)$، وإذا كان الحدثين الموافقين لـ $X=x, Y=y$ مستقلين فإنَّ $P[X=x,Y=y] = f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ ونقول إن المتحولين X,Y مستقلين.

4- إنَّ الجدول الاحتمالي للشعاع العشوائي (X,Y) له الشكل:

$Y \backslash X$	قيم X	$f_Y(y)$
قيم Y	$f(x,y)$	نجمع كل قيم $f(x,y)$ الواقعة في سطر واحد لأجل كل قيمة لـ Y.
$f_X(x)$	نجمع كل قيم $f(x,y)$ الواقعة في عمود واحد لأجل كل قيمة لـ X.	1

ثانياً. الشعاع العشوائي المستمر. ليكن X,Y متحولين عشوائيين مستمرين، نقول عن الدالة $f(x,y)$ إنها دالة احتمالية مشتركة للمتحولين العشوائيين X,Y إذا حققت الشروط الآتية:

1- $0 \le f(x,y)$. 2- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$. 3- $P[(X,Y)\in A] = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

ملاحظة.

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx, \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$.
- إذا كان $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ نقول إن المتحولين X,Y مستقلين.

أمثلة.

12- نلقي حجري نرد متمايزين، ولنفرض أنَّ X متحولاً عشوائياً يدل على مجموع رقمي الوجهين الظاهرين وأنَّ Y متحولاً عشوائياً يدل على أصغر هذين العددين ارسم الجدول الاحتمالي للشعاع العشوائي (X,Y) والجدول الاحتمالي لكل من X,Y ، ثم احسب احتمال أن يكون مجموع الوجهين الظاهرين أصغر تماماً من 4 وأصغر العددين أصغر أو يساوي 4.

الحل.

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$، أما مجموعة قيم المتحول العشوائي Y فهي $\{1,2,3,4,5,6\}$.

نرسم الجدول الآتي الذي يوضح لنا التجربة ومجموعة قيم المتحولات العشوائية (X,Y):

	1	2	3	4	5	6
1	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)
2	(3,1)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
3	(4,1)	(5,2)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)
4	(5,1)	(6,2)	(7,3)	(8,4)	(9,4)	(10,4)
5	(6,1)	(7,2)	(8,3)	(9,4)	(10,5)	(11,5)
6	(7,1)	(8,2)	(9,3)	(10,4)	(11,5)	(12,6)

إنَّ الجدول الاحتمالي للشعاع العشوائي (X,Y) له الشكل:

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$f_Y(y)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{11}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{9}{36}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$P[X<4,Y\le 4]=f(3,4)+f(3,3)+f(3,2)+f(3,1)+f(2,4)+f(2,3)+f(2,2)+f(2,1)$$
$$=0+0+0+\frac{2}{36}+0+0+0+\frac{1}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

13- نلقي حجري نرد متمايزين، ولنفرض أنَّ X متحولاً عشوائياً يدل على باقي قسمة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين على 2 وأنَّ Y متحولاً عشوائياً يدل على باقي قسمة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين على 4 ارسم الجدول الاحتمالي للشعاع العشوائي (X,Y) والجدول الاحتمالي لكل من X,Y.

الحل.

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي $\{0,1\}$، أما مجموعة قيم المتحول العشوائي Y فهي $\{0,1,2,3\}$.

نرسم الجدول الآتي الذي يوضح لنا التجربة ومجموعة قيم المتحولات العشوائية (X,Y):

	1	2	3	4	5	6
1	2 (0,2)	3 (1,3)	4 (0,0)	5 (1,1)	6 (0,2)	7 (1,3)
2	3 (1,3)	4 (0,0)	5 (1,1)	6 (0,2)	7 (1,3)	8 (0,0)
3	4 (0,0)	5 (1,1)	6 (0,2)	7 (1,3)	8 (0,0)	9 (1,1)
4	5 (1,1)	6 (0,2)	7 (1,3)	8 (0,0)	9 (1,1)	10 (0,2)
5	6 (0,2)	7 (1,3)	8 (0,0)	9 (1,1)	10 (0,2)	11 (1,3)
6	7 (1,3)	8 (0,0)	9 (1,1)	10 (0,2)	11 (1,3)	12 (0,0)

إنَّ الجداول الاحتمالية المطلوبة هي:

Y \ X	0	1	$f_Y(y)$
0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
1	0	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$
2	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
3	0	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$
$f_X(x)$	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$	1

X	0	1
$f_X(x)$	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$

14- يقوم راميان A,B بالإطلاق على هدف ثابت، يطلق الرامي A طلقتين أما الرامي B يطلق ثلاث طلقات، ولنفرض أنَّ X متحولاً عشوائياً يدل على عدد مرات إصابة الرامي A للهدف، و أنَّ Y متحولاً عشوائياً يدل على عدد مرات إصابة الرامي B للهدف، ارسم الجدول الاحتمالي للشعاع العشوائي (X,Y) والجدول الاحتمالي لكل من X,Y ، علماً أنَّ احتمال اصابة الرامي A للهدف يساوي $\frac{1}{3}$ واحتمال اصابة الرامي B للهدف يساوي $\frac{3}{5}$.

الحل.

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي $\{0,1,2\}$، أما مجموعة قيم المتحول العشوائي Y فهي $\{0,1,2,3\}$.
ونلاحظ أنَّ الأحداث المقابلة لقيم المتحولين العشوائيين X,Y وقيم الشعاع العشوائي (X,Y) هي أحداث مستقلة، ولنرض.

وعليه فإنَّ:

$$f_X(0)=P[X=0]=P(A_1'\cap A_2')=P(A_1')P(A_2')=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$f_X(1)=P[X=1]=P([A_1\cap A_2']\cup[A_1'\cap A_2])=2P(A_1)P(A_2')=2\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$f_X(2)=P[X=2]=P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

$$f_Y(0)=P[Y=0]=P(B_1'\cap B_2'\cap B_3')=P(B_1')P(B_2')P(B_3')=\left(1-\frac{3}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$

$$f_Y(1)=P[Y=1]=P([B_1\cap B_2'\cap B_3']\cup[B_1'\cap B_2\cap B_3']\cup[B_1'\cap B_2'\cap B_3])$$
$$=3P(B_1)P(B_2')P(B_3')=3\frac{3}{5}\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$$

$$f_Y(2)=P[Y=2]=P([B_1'\cap B_2\cap B_3]\cup[B_1\cap B_2'\cap B_3]\cup[B_1\cap B_2\cap B_3'])$$
$$=3P(B_1)P(B_2)P(B_3')=3\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{54}{125}$$

$$f_Y(3)=P[Y=3]=P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$

$$f(0,0)=P[X=0,Y=0]=f_X(0)\cdot f_Y(0)=\frac{4}{9}\times\frac{8}{125}=\frac{32}{1125}$$

$$f(0,1)=P[X=0,Y=1]=f_X(0)\cdot f_Y(1)=\frac{4}{9}\times\frac{36}{125}=\frac{144}{1125}$$

$$f(0,2)=P[X=0,Y=2]=f_X(0)\cdot f_Y(2)=\frac{4}{9}\times\frac{54}{125}=\frac{216}{1125}$$

$$f(0,3)=P[X=0,Y=3]=f_X(0)\cdot f_Y(3)=\frac{4}{9}\times\frac{27}{125}=\frac{108}{1125}$$

$$f(1,0)=P[X=1,Y=0]=f_X(1)\cdot f_Y(0)=\frac{4}{9}\times\frac{8}{125}=\frac{32}{1125}$$
$$f(1,1)=P[X=1,Y=1]=f_X(1)\cdot f_Y(1)=\frac{4}{9}\times\frac{36}{125}=\frac{144}{1125}$$
$$f(1,2)=P[X=1,Y=2]=f_X(1)\cdot f_Y(2)=\frac{4}{9}\times\frac{54}{125}=\frac{216}{1125}$$
$$f(1,3)=P[X=1,Y=3]=f_X(1)\cdot f_Y(3)=\frac{4}{9}\times\frac{27}{125}=\frac{108}{1125}$$

$$f(2,0)=P[X=2,Y=0]=f_X(2)\cdot f_Y(0)=\frac{1}{9}\times\frac{8}{125}=\frac{8}{1125}$$
$$f(2,1)=P[X=2,Y=1]=f_X(2)\cdot f_Y(1)=\frac{1}{9}\times\frac{36}{125}=\frac{36}{1125}$$
$$f(2,2)=P[X=2,Y=2]=f_X(2)\cdot f_Y(2)=\frac{1}{9}\times\frac{54}{125}=\frac{54}{1125}$$
$$f(2,3)=P[X=2,Y=3]=f_X(2)\cdot f_Y(3)=\frac{1}{9}\times\frac{27}{125}=\frac{27}{1125}$$

وبالتالي تكون الجداول الاحتمالية بالشكل:

$Y \backslash X$	0	1	2	$f_Y(y)$
0	$\frac{32}{1125}$	$\frac{32}{1125}$	$\frac{8}{1125}$	$\frac{8}{125}$
1	$\frac{144}{1125}$	$\frac{144}{1125}$	$\frac{36}{1125}$	$\frac{36}{125}$
2	$\frac{216}{1125}$	$\frac{216}{1125}$	$\frac{54}{1125}$	$\frac{54}{125}$
3	$\frac{108}{1125}$	$\frac{108}{1125}$	$\frac{27}{1125}$	$\frac{27}{125}$
$f_X(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

X	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

15– لتكن لدينا الدالة:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & ; 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

1. بين أنَّ الدالة المفروضة هي دالة احتمالية لشعاع عشوائي مستمر (X,Y).
2. عين $f_X(x), f_Y(y)$.
3. أحسب قيمة $P[0<X<\frac{1}{2}, Y>0]$.

الحل.

1. إنَّ التابع f مستمر، عندئذ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,dx\,dy=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(x+y)\,dx\,dy=\int_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+y\,x\right)_0^1 dy$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=\left(\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right)_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

وهذا يبين أنَّ الدالة المفروضة هي دالة احتمالية لشعاع عشوائي مستمر (X,Y).

2. لنوجد أولاً $f_X(x)$، لدينا:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{0}^{1}(x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1=x+\frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & ;0<x<1 \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

نوجد الآن $f_Y(y)$، لدينا:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,d\,x=\int_{0}^{1}(x+y)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_0^1=y+\frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$f_Y(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2} & ;0<y<1 \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

.3

$$P[0<X<\frac{1}{2},Y>0]=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(x+y)\,dx\,dy=\int_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+y\,x\right)_0^{\frac{1}{2}}dy=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{8}+\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{1}{8}y+\frac{y^2}{4}\right)_0^1=\frac{3}{8}$$

16- لتكن لدينا الدالة:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2\,e^{-x-2y} & ;\ 0<x<\infty, 0<y<\infty \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

1. بين أنَّ الدالة المفروضة هي دالة احتمالية لشعاع عشوائي مستمر (X,Y).
2. عين $f_X(x), f_Y(y)$.
3. أحسب قيمة $P[X>1,Y<1], P[X<a], P[X<Y]$.

الحل.

1. إنَّ التابع f مستمر، عندئذ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}(2e^{-x-2y})\,dx\,dy = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}(2e^{-x}e^{-2y})\,dx\,dy =$$

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-2y}dy = 2\left(-e^{-x}\right)_0^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}e^{-2y}\right)_0^{+\infty} = \left(e^{-x}\right)_0^{+\infty}\left(e^{-2y}\right)_0^{+\infty} = [0-1][0-1] = 1$$

وهذا يبين أنَّ الدالة المفروضة هي دالة احتمالية لشعاع عشوائي مستمر (X,Y).

2. لنوجد أولاً $f_X(x)$، لدينا:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{+\infty}(2e^{-x-2y})\,dy = 2e^{-x}\int_{0}^{+\infty} e^{-2y}dy = 2e^{-x}\left[\frac{-1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty}$$
$$= -e^{-x}[0-1] = e^{-x}$$

وبالتالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ;0 < x < +\infty \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

نوجد الآن $f_Y(y)$، لدينا:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,d\,x = \int_{0}^{+\infty}(2e^{-x-2y})\,d\,x = 2e^{-2y}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}d\,x = 2e^{-2y}\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$$
$$= -2e^{-2y}\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -2e^{-2y}\left[0-1\right] = 2e^{-2y}$$

وبالتالي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & ;0 < y < +\infty \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

3.

$$P[X>1, Y<1] = \int_{1}^{+\infty}\int_{0}^{1} 2e^{-x-2y}dy\,dx = 2\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx\int_{0}^{1} e^{-2y}dy = 2\left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty}\left[\frac{-1}{2}e^{-2y}\right]_0^{1}$$
$$= \left[e^{-x}\right]_1^{+\infty}\left[e^{-2y}\right]_0^{1} = [0-\frac{1}{e}][\frac{1}{e^2}-1] = \frac{e^2-1}{e^3}$$

$$P[X<a] = \int_{0}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{a} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{a} = 1-e^{-a}$$

$$P[X<Y] = P[X<y, 0<Y<+\infty] = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{y} 2e^{-x-2y}dx\,dy = \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2y}\left(\int_{0}^{y} e^{-x}dx\right)dy$$
$$= \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\right)_0^{y}dy = \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2y}\left(1-e^{-y}\right)dy = 2\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-2y}-e^{-3y}\right)dy$$
$$= 2\left[\frac{1}{3}e^{-3y}-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} = 2\left[0-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\right] = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

التوزيعات الشرطية

ليكن X,Y متحولان عشوائيان عندئذ فإنَّ التوزيع الشرطي للمتحول Y عندما $X=x$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

أما التوزيع الشرطي للمتحول X عندما $Y=y$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

ملاحظة.

إذا كان X,Y متحولان عشوائيان متقطعان فإنَّ:

$$P[a<X<b|Y=y]=\sum_{a<x<b} f(x|y)$$

إذا كان X,Y متحولان عشوائيان مستمران فإنَّ:

$$P[a<X<b|Y=y]=\int_a^b f(x|y)\,dx$$

أمثلة.

17- ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً متقطعاً تعطى الدالة الاحتمالية له بالجدول:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{10}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{6}{28}$	0	$\frac{15}{28}$
2	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
$f_Y(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$	1

أوجد جدول الدالة الاحتمالية $f(x|Y=1)$ ، واحسب $P[X=0|Y=1],P[0\le X\le 1|Y=1]$.

الحل.

نلاحظ أنَّ $f_Y(1)=\frac{12}{28}$ وبالتالي: $f(x|1)=\frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\frac{28}{12}f(x,1)$

وبالتالي:

$$f(0|1)=\frac{28}{12}f(0,1)=\frac{28}{12}\frac{6}{28}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$f(1|1)=\frac{28}{12}f(1,1)=\frac{28}{12}\frac{6}{28}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$f(2|1)=\frac{28}{12}f(2,1)=\frac{28}{12}\times 0=0$$

وبالتالي الجدول المطلوب:

X	0	1	2
$f(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$P[X=0\,|\,Y=1]=f(0\,|\,1)=\frac{1}{2}$$

$$P[1\le X\le 2\,|\,Y=1]=f(1\,|\,1)+f(2\,|\,1)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

18- ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً متقطعاً تعطى الدالة الاحتمالية له بالشكل:

$$f(x,y)=\begin{cases}10xy^2 & ;\ 0<x<y<1\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}$$

1. أوجد $f(x\,|\,y),\,f(y\,|\,x),\,f_X(x),\,f_Y(y)$
2. أحسب $P[Y>\frac{1}{2}\,|\,X=\frac{1}{4}],P[X>\frac{1}{4}\,|\,Y=\frac{1}{2}]$.
3. ماهي قيمة $P[X>\frac{1}{2}\,|\,Y=\frac{1}{4}]$.

الحل.

.1

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_x^1 10xy^2dy$ $=\frac{10}{3}x\left[y^3\right]_x^1=\frac{10}{3}\left(x-x^4\right)$ $f_X(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}\left(x-x^4\right) & ;\ 0<x<1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$	$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_0^y 10xy^2dx$ $=5y^2\left[x^2\right]_0^y=5y^4$ $f_Y(y)=\begin{cases}5y^4 & ;\ 0<y<1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$
$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3y^2}{1-x^3} & ;\ 0<x<y<1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$	$f(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{y^2} & ;\ 0<x<y<1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$

.2

$$P[Y>\frac{1}{2}\,|\,X=\frac{1}{4}]=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(y\,|\,x=\frac{1}{4})\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3y^2}{1-(\frac{1}{4})^3}dy=\frac{64}{63}\left[y^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{64}{63}\left[1-\frac{1}{8}\right]=\frac{64}{63}\frac{7}{8}=\frac{8}{9}$$

$$P[X>\frac{1}{4}\,|\,Y=\frac{1}{2}]=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}f(x\,|\,y=\frac{1}{2})\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{2x}{(\frac{1}{2})^2}dx=4\left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=4[\frac{1}{4}-\frac{1}{16}]=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

.3 $P[X>\frac{1}{2}\,|\,Y=\frac{1}{4}]=0$.

بعض القيم المميزة للتوزيعات الاحتمالية

أولاً. التوقع الرياضي (المتوسط).

المتحول	صيغة التوقع الرياضي
المتحول العشوائي المتقطع	$\mu = E(X) = \sum_x x\, f(x)$
المتحول العشوائي المستمر	$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$
$g(x)$ دالة بمتحول عشوائي متقطع	$E(X) = \sum_x g(x)\, f(x)$
$g(x)$ دالة بمتحول عشوائي مستمر	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\,dx$
$g(x,y)$ دالة بشعاع عشوائي متقطع	$E(g(x,y)) = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f(x,y)$
$g(x,y)$ دالة بشعاع عشوائي مستمر	$E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy$

خصائص التوقع الرياضي.

1. $E(c) = c$.
2. $E(cX) = cE(X)$.
3. $E(g_1(x) + g_2(x)) = E(g_1(x)) + E(g_2(x))$.
4. إذا كان X, Y متغيران عشوائيان مستقلين فإنَّ $E(XY) = E(X)E(Y)$.

ثانياً. التباين (التشتت).

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

خصائص التباين.

1. $V(c) = 0$.
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
3. إذا كان X, Y متغيران عشوائيان مستقلين فإنَّ $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

ثالثاً. الانحراف المعياري.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

رابعاً. التغاير بين متحولين عشوائيين.

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين عندئذ فإنَّ التغاير بين X, Y يعرف بالشكل:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

خصائص التغاير بين متحولين عشوائيين.

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
2. $\operatorname{cov}(X,X) = V(X)$.
3. $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{cov}(X,Y)$.
4. $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$.

خامساً. عامل الارتباط بين متحولين عشوائيين.

ليكن X,Y متغيرين عشوائيين عندئذ فإنَّ عامل الارتباط بين X,Y يعرف بالشكل:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

خصائص عامل الارتباط بين متحولين عشوائيين.

1. $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$.
2. $-1\le\rho(X,Y)\le 1$.
3. $\rho(X,X)=1,\ \rho(X,-X)=-1$.
4. إذا كان $a\,c>0$ فإنَّ $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$.
5. إذا كان $a\,c<0$ فإنَّ $\rho(aX+b,cY+d)=-\rho(X,Y)$.

سادساً. العزوم والدالة المولدة للعزوم.

أولاً. ليكن X متغيراً عشوائياً عندئذ ندعو المقدار $m_r=E(X^r)$ بالعزم الابتدائي من المرتبة r للمتحول العشوائي X.

ثانياً. ليكن X متغيراً عشوائياً عندئذ ندعو الدالة $M_X(t)=E(e^{tX})$ بالدالة المولدة للعزوم للمتحول العشوائي X.

ملاحظات.

- $m_1=E(X)$.
- $V(X)=m_2-m_1^2$.
- إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً فإنَّ: $M_X(t)=\sum_X[e^{tx}f(x)]$.
- إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً فإنَّ: $M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)\,dx$.
- العلاقة بين العزوم والدالة المولدة للعزوم : $m_r=\frac{d^rM_X(t)}{dt^r}|_{t=0}=M_X^{(r)}(0)\ \ ;r=1,2,3,.....$ والتي تعني أنَّ العزم الابتدائي من المرتبة r للمتحول العشوائي X هو المشتق من المرتبة r للدالة المولدة للعزوم عند النقطة $t=0$.

خصائص الدالة المولدة للعزوم.

1. إذا كان X متغيراً عشوائياً وكان $Y=aX+b$ فإنَّ $M_Y(t)=e^{bt}M_X(at)$.
2. إذا كان X,Y متغيران عشوائيان مستقلين فإنَّ $M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$.

أمثلة.

19. بالعودة إلى المثال 1، لنوجد $m_1,m_2,E(X),V(X),\sigma_X,M_X(t),M'_X(0),M''_X(0)$. لذلك نشكل الجدول:

x	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$x\,f(x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{20}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{12}{10}$

$x^2\ f(x)$	$\frac{36}{10}$	$\frac{49}{10}$	$\frac{128}{10}$	$\frac{162}{10}$	$\frac{200}{10}$	$\frac{121}{10}$	$\frac{144}{10}$

وبالتالي:

$$m_1=\mu=E(X)=\sum_X x\,f(x)=\frac{90}{10}=9 \qquad m_2=E(X^2)=\sum_X x^2\,f(x)=\frac{840}{10}=84$$

$$V(X)=E(X^2)-\mu^2=84-81=3 \qquad \sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}$$

$$M_X(t)=\sum_X[e^{tx}f(x)]=e^{6t}\frac{1}{10}+e^{7t}\frac{1}{10}+e^{8t}\frac{2}{10}+e^{9t}\frac{2}{10}+e^{10t}\frac{2}{10}+e^{11t}\frac{1}{10}+e^{12t}\frac{1}{10}$$

$$=\frac{1}{10}\left[e^{6t}+e^{7t}+e^{11t}+e^{12t}\right]+\frac{2}{10}\left[e^{8t}+e^{9t}+e^{10t}\right]$$

$$M'_X(t)=\frac{1}{10}\left[6e^{6t}+7e^{7t}+11e^{11t}+12e^{12t}\right]+\frac{2}{10}\left[8e^{8t}+9e^{9t}+10e^{10t}\right]$$

$$m_1=M'_X(0)=\frac{1}{10}[6+7+11+12]+\frac{2}{10}[8+9+10]=\frac{90}{10}=9$$

$$M''_X(t)=\frac{1}{10}\left[36e^{6t}+49e^{7t}+121e^{11t}+144e^{12t}\right]+\frac{2}{10}\left[64e^{8t}+81e^{9t}+100e^{10t}\right]$$

$$m_2=M''_X(0)=\frac{1}{10}[36+49+121+144]+\frac{2}{10}[64+81+100]=\frac{840}{10}=84$$

20. ليكن X متحول عشوائي مستمر أوجد $E(X),V(X),\sigma_X$ علماً أنَّ الدالة الاحتمالية له تعطى بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{1}{12} & ;\quad 0<x<3\\ 0 & ;\quad otherwise\end{cases}$$

الحل.

$$m_1=\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=\int_0^3\frac{x^2}{6}+\frac{x}{12}dx=\left[\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{24}\right]_0^3=\frac{27}{18}+\frac{9}{24}=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$$

$$m_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,f(x)\,dx=\int_0^3\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{12}dx=\left[\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{36}\right]_0^3=\frac{81}{24}+\frac{27}{36}=\frac{27}{8}+\frac{3}{4}=\frac{33}{8}$$

$$V(X)=E(X^2)-\mu^2=\frac{33}{8}-\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{39}{64} \qquad \sigma_X=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{39}}{8}$$

21. بالعودة إلى المثال 14 أوجد $E(X),E(Y),V(X),V(Y),E(XY),V(X+Y),\text{cov}(X,Y),\rho(X,Y)$.

الحل.

X	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
$x\,f_X(x)$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
$x^2\,f_X(x)$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$
$y\,f_Y(y)$	0	$\frac{36}{125}$	$\frac{108}{125}$	$\frac{81}{125}$
$y^2\,f_Y(y)$	0	$\frac{36}{125}$	$\frac{216}{125}$	$\frac{243}{125}$

$$\mu_X = E(X) = 0 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = 0 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{2}{3}$$

$$\mu_Y = E(Y) = 0 + \frac{36}{125} + \frac{108}{125} + \frac{81}{125} = \frac{225}{125} = \frac{9}{5}$$

$$E(Y^2) = 0 + \frac{36}{125} + \frac{216}{125} + \frac{243}{125} = \frac{495}{125} = \frac{99}{25}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{99}{25} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{18}{25}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

بما أنَّ X, Y مستقلين فإنَّ:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{4}{9} + \frac{18}{25} = \frac{262}{225}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{2}{3}\frac{9}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = 0$$

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \frac{6}{5} - \frac{2}{3}\frac{9}{5} = 0$$

ملاحظة. إذا كان X, Y مستقلين فإنَّ $\text{cov}(X,Y) = 0,\ \rho(X,Y) = 0$ والعكس صحيح.

22. يحوي صندوق على 4 بطاقات تحمل الأرقام 1،2،4،5، نسحب من الصندوق بطاقتين معاً، لنفرض أنَّ X متحول عشوائي يدل على مجموع رقمي البطاقتين وأنَّ Y متحول عشوائي يدل على أكبر الرقمين المسحوبين ارسم الجدول الاحتمالي للشعاع العشوائي (X,Y) ثم عين $\rho(X,Y)$، وهل X, Y مستقلين.

الحل.

نشكل جدول نبين فيه الأحداث ومجموعة قيم (x,y). وجدول الدالة الاحتمالية للشعاع العشوائي (X,Y).

	1	2	4	5
1	/	(3,2)	(5,4)	(6,5)
2	/	/	(6,4)	(7,5)
4	/	/	/	(9,5)
5	/	/	/	/

$Y \backslash X$	3	5	6	7	9	$f_Y(y)$
2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{6}$
5	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

وبالتالي الجداول الاحتمالية للمتغيرات العشوائية X, Y فهي:

X	3	5	6	7	9
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x\,f_X(x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{6}$
$x^2\,f_X(x)$	$\frac{9}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{72}{6}$	$\frac{49}{6}$	$\frac{81}{6}$

Y	2	4	5
$f_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
$y\,f_Y(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{15}{6}$
$y^2\,f_Y(y)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{32}{6}$	$\frac{75}{6}$

$$\mu_X = E(X) = \frac{36}{6} = 6 \qquad E(X^2) = \frac{236}{6} = \frac{118}{3}$$
$$V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{118}{3} - (6)^2 = \frac{10}{3}$$
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \frac{25}{6} \qquad E(Y^2) = \frac{111}{6}$$
$$V(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{111}{6} - \left(\frac{25}{6}\right)^2 = \frac{41}{36}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \frac{\sqrt{41}}{6}$$

$$E(XY) = \sum_X \sum_Y x\, y\, f(x,y)$$
$$= 3\times 2\times f(3,2) + 5\times 4\times f(5,4) + 6\times 5\times f(6,5) + 6\times 4\times f(6,4) + 7\times 5\times f(7,5) + 9\times 5\times f(9,5)$$
$$= \frac{1}{6}(6+20+30+24+35+45) = \frac{160}{6} = \frac{80}{3}$$
$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{80}{3} - \frac{25}{6}\times 6 = \frac{80}{3} - 25 = \frac{5}{3}$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{10}{3}}\times\frac{\sqrt{41}}{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{10}}\times\frac{6}{\sqrt{41}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{410}}$$

بما أنَّ $\rho(X,Y) \neq 0$ فإنَّ المتحولين X,Y غير مستقلين.

بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

أولاً. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.

1). توزيعات التجربة الثنائية.

التجربة الثنائية هي تجربة عند إجرائها مرة واحدة فإن الحدث البسيط فيها يحتمل إحدى نتيجتين فقط أي إنَّ فضاء العينة فيها يتألف من عنصرين فقط، فعلى سبيل المثال:

- رمي قطعة النقود مرة واحدة تكون النتيجة إما شعار أو كتابة.
- نتيجة امتحان تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- جنس المولود يكون إما ذكراً أو أنثى.
- الإطلاق من قبل رامي على هدف تكون النتيجة إما أن يصيب الهدف أو لا يصيبه.
- فحص جهاز كهربائي تكون النتيجة إما صالح أو تالف.
- قابلية قسمة وجه حجر النرد الظاهر على 2 تكون النتيجة إما أن يقبل القسمة أو لا يقبل القسمة.

ونهتم في التجربة الثنائية بأحد النتيجتين ونصفها نجاحاً ونرمز لاحتمالها بالرمز p والنتيجة الثانية نصفها فشلاً ونرمز لاحتمالها بالرمز q، ويكون $q=1-p$.

يمكن تكرار التجربة الثنائية أكثر من مرة وتكون النتيجة التي نحصل عليها في مرة من مرات التكرار مستقلة عن بقية النتائج في بقية مرات تكرار التجربة.

إذا كررنا تجربة ثنائية n مرة وربطناها بمتحول عشوائي متقطع X يدل على عدد مرات الحصول على نتيجة النجاح فإن هذا المتحول يأخذ قيمه من المجموعة $\{0,1,2,...,n\}$ وعلى حسب قيمة n نميز نوعين من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.

1- التوزيع النقطي (برنولي). عندما نجري التجربة مرة واحدة فقط أي إنَّ $n=1$.

عندئذ يأخذ المتحول العشوائي X قيمه من المجموعة $\{0,1\}$ وتكون الدالة الاحتمالية لهذا المتحول لها الشكل $f(x)=p^x q^{1-x}$، ونلاحظ أنَّ $P[X=0]=f(0)=q, P[X=1]=f(1)=p$. كما يكون:

$$E(X)=p \qquad V(X)=\sigma_X^2=pq \qquad M_X(t)=q+pe^t$$

أمثلة.

23. يطلق رامي النار على هدف، إذا علمت أنَّ احتمال إصابة الرامي للهدف يساوي $\frac{1}{3}$، عندئذ ما هو التوزيع الاحتمالي الذي يصف هذه التجربة وماهي الدالة الاحتمالية التي تصف هذا التوزيع علماً أنَّ X هو المتحول العشوائي الخاص بهذا التوزيع، ارسم جدول الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع واحسب كلاً من $E(X),V(X),\sigma_X,M_X(t)$.

الحل.

إنَّ التجربة المفروضة هي تجربة ثنائية تجرى مرة واحدة عندئذ التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة هو التوزيع النقطي (برنولي)، ونلاحظ أنَّ $p=\frac{1}{3}, q=1-p=\frac{2}{3}$. الدالة الاحتمالية: $f(x)=(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{1-x}$، حيث إنَّ $x\in\{0,1\}$.

$$E(X)=p=\frac{1}{3}, V(X)=pq=\frac{2}{9}, \sigma_X=\frac{\sqrt{2}}{3}, M_X(t)=q+pe^t=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^t$$

X	0	1
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

ملاحظة. يمكن إعادة المسألة السابقة لأجل أي تجربة ثنائية من التجارب التي تحدثنا عنها سابقاً.

2- التوزيع الثنائي (الحداني). عندما نجري التجربة $n>1$ مرة.
عندئذ يأخذ المتحول العشوائي X قيمه من المجموعة $\{0,1,2,...,n\}$ وتكون الدالة الاحتمالية لهذا المتحول لها الشكل $f(x)=C_n^x\ p^x q^{n-x}$. كما يكون:

$$E(X)=n\,p \qquad V(X)=\sigma_X^2=n\,pq \qquad M_X(t)=\left(q+p\,e^t\right)^n$$

أمثلة.

24. يطلق رامي النار على هدف أربع مرات، إذا علمت أنَّ احتمال إصابة الرامي للهدف يساوي $\frac{1}{3}$، عندئذ ما هو التوزيع الاحتمالي الذي يصف هذه التجربة وماهي الدالة الاحتمالية التي تصف هذا التوزيع علماً أنَّ X هو المتحول العشوائي الخاص بهذا التوزيع، ارسم جدول الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع واحسب كلاً من $E(X),V(X),\sigma_X,M_X(t)$. ما هو احتمال اصابة الهدف بطلقتين على الأقل، ما هو احتمال اصابة الهدف بطلقتين على الأكثر، ما هو احتمال اصابة الهدف بطلقة واحدة على الأكثر.

الحل.
إنَّ التجربة المفروضة هي تجربة ثنائية تجرى أربع مرات عندئذ التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة هو التوزيع الثنائي (الحداني)، ونلاحظ أنَّ $p=\frac{1}{3},\ q=1-p=\frac{2}{3}$. الدالة الاحتمالية: $f(x)=C_4^x\,(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{4-x}$ ، حيث إنَّ $x\in\{0,1,2,3,4\}$.

$$E(X)=n\,p=\frac{4}{3},V(X)=n\,pq=\frac{8}{9},\sigma_X=\frac{2\sqrt{2}}{3},M_X(t)=\left(q+p\,e^t\right)^n=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^t\right)^4$$

X	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$f(0)=C_4^0\,(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^{4-0}=\frac{16}{81} \qquad \left(C_4^0=1\right) \qquad f(1)=C_4^1\,(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^{4-1}=\frac{32}{81} \qquad \left(C_4^1=4\right)$$

$$f(2)=C_4^2\,(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^{4-2}=\frac{24}{81} \qquad \left(C_4^2=6\right) \qquad f(3)=C_4^3\,(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^{4-3}=\frac{8}{81} \qquad \left(C_4^3=4\right)$$

$$f(4)=C_4^4\,(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^{4-4}=\frac{1}{81} \qquad \left(C_4^4=1\right)$$

نفرض أنَّ A هو حدث اصابة الهدف بطلقتين على الأقل، عندئذ فإنَّ:

$$P(A)=P[X\geq 2]=f(2)+f(3)+f(4)=\frac{33}{81}$$

نفرض أنَّ B هو حدث اصابة الهدف بطلقتين على الأكثر، عندئذ فإنَّ:

$$P(B)=P[X\leq 2]=f(2)+f(1)+f(0)=\frac{72}{81}$$

نفرض أنَّ C هو حدث اصابة الهدف بطلقة واحدة على الأكثر، عندئذ فإنَّ:

$$P(C)=P[X\le 1]=1-P[X\ge 2]=1-\frac{33}{81}=\frac{48}{81}$$

ملاحظة. يمكن إعادة المسألة السابقة لأجل أي تجربة ثنائية من التجارب التي تحدثنا عنها سابقاً.

2). توزيع بواسون.

التجربة البواسونية تمثل عدد النجاحات في وحدة قياس ما ولتكن λ. وإذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد النجاحات في وحدة القياس فإنَّ الدالة الاحتمالية لهذا المتحول لها الشكل $P[X=x]=f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$، كما يكون:

$$E(X)=\lambda \quad V(X)=\sigma_X^2=\lambda \quad M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

أمثلة.

25. لنفرض أنَّ عدد السيارات التي تخالف قواعد السير على طريق حمص – حماة ما بين الساعة 10 والساعة 11 هو 1.8 سيارة في الدقيقة وليكن X متحولاً عشوائياً يمثل عدد السيارات المخالفة في الدقيقة، احسب كلاً من $E(X),V(X),\sigma_X,M_X(t)$. ثم أحسب احتمال أن يتم بين الساعة 10.51 و10.52 :

1. ولا مخالفة. 2. مخالفة واحدة. 3. مخالفتان. 4. مخالفتين على الأقل. 5. أكثر تماماً من مخالفتين.
6. مخالفتان أو ثلاثة أو أربعة.

الحل.

إنَّ التجربة المفروضة هي تجربة بواسونية فيها $\lambda=1.8$.

الدالة الاحتمالية للمتحول العشوائي X لها الشكل $P[X=x]=f(x)=\frac{(1.8)^x}{x!}e^{-1.8}$.

$$E(X)=1.8 \quad V(X)=1.8 \quad \sigma_X=\sqrt{1.8} \quad M_X(t)=e^{1.8(e^t-1)}$$

$$1.P[X=0]=f(0)=\frac{(1.8)^0}{0!}e^{-1.8}\approx 0.17$$

$$2.P[X=1]=f(1)=\frac{(1.8)^1}{1!}e^{-1.8}\approx 0.30$$

$$3.P[X=2]=f(2)=\frac{(1.8)^2}{2!}e^{-1.8}\approx 0.27$$

$$4.P[X\ge 2]=1-\left[P[X=0]+P[X=1]\right]\approx 1-\left[0.17+0.30\right]=0.53$$

$$5.P[X>2]=1-\left[P[X=0]+P[X=1]+P[X=2]\right]\approx 1-\left[0.17+0.30+0.27\right]=0.26$$

$$6.P[X=2\cup X=3\cup X=4]=P[X=2]+P[X=3]+P[X=4]$$

$$=\frac{(1.8)^2}{2!}e^{-1.8}+\frac{(1.8)^3}{3!}e^{-1.8}+\frac{(1.8)^4}{4!}e^{-1.8}\approx 0.56$$

26. لنفرض أنَّ معدل دخول المصابين بمرض معين إلى مشفى حمص الوطني هو 5 في يوم معين. وليكن X متحولاً عشوائياً يمثل عدد المصابين بهذا المرض والذين يدخلون المشفى في يوم معين، والمطلوب هو حساب كلاً من $E(X),V(X),\sigma_X,M_X(t)$. ثم أحسب:

1. احتمال ألا يدخل المشفى أي مريض في يوم معين.
2. احتمال أن يدخل المشفى 4 مرضى على الأكثر في يوم معين (أربع مرضى أو أقل).

الحل.

إنَّ التجربة المفروضة هي تجربة بواسونية فيها $\lambda = 5$.

الدالة الاحتمالية للمتحول العشوائي X لها الشكل $P[X = x] = f(x) = \frac{5^x}{x!}e^{-5}$.

$$E(X) = 5 \quad V(X) = 5 \quad \sigma_X = \sqrt{5} \quad M_X(t) = e^{5(e^t - 1)}$$

$$1.P[X = 0] = f(0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} = e^{-5} \approx 0.007$$

$$2.P[X \le 4] = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

$$= \frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} + \frac{5^3}{3!}e^{-5} + \frac{5^4}{4!}e^{-5} \approx 0.44$$

ثانياً. التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

1). التوزيع المنتظم.

ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً، نقول إنَّ X يتوزع توزيعاً منتظماً على المجال $[a,b]$ إذا كانت الدالة الاحتمالية له لها الشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ; \quad a\le x\le b\\ 0 & ; \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

أمثلة.

27. ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً يتوزع توزيعاً منتظماً على المجال $[a,b]$، عندئذ أثبت أنَّ:

$$E(X)=\frac{b+a}{2},V(X)=\frac{(b-a)^2}{12},M_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

الحل.اطلاع.

$$\bullet\ \mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^2}{2(b-a)}-\frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

$$\bullet V(X)=E(X^2)-\mu^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\ f(x)\,dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^3}{3(b-a)}-\frac{a^3}{3(b-a)}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$V(X)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}$$

$$=\frac{4b^3-4a^3-3\left(b^2+2ab+a^2\right)(b-a)}{12(b-a)}$$

$$=\frac{4b^3-4a^3-3b^3-6ab^2-3a^2b+3b^2a+6a^2b+3a^3}{12(b-a)}$$

$$=\frac{b^3-3b^2a+3a^2b-a^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\bullet M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\ f(x)\,dx=\int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\,dx=\frac{1}{t(b-a)}\left[e^{tx}\right]_a^b=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

نتيجة.

ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً يتوزع توزيعاً منتظماً على المجال $[a,b]$، عندئذ فإنَّ: $\sigma_X=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

28. ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً يتوزع توزيعاً منتظماً على المجال $[1,3]$، عندئذ اكتب صيغة الدالة الاحتمالية لهذا المتحول العشوائي، ثم عين $E(X),V(X),\ \sigma_X\ ,M_X(t)$ ، ثم احسب $P[X>2]$.

الحل.

نلاحظ أنَّ $a=1,b=3$.

الدالة الاحتمالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ; \quad 1\le x\le 3\\ 0 & ; \quad x\notin[1,3]\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{b+a}{2}=\frac{1+3}{2}=2 \qquad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{2^2}{12}=\frac{1}{3} \qquad \sigma_X=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$M_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}=\frac{e^{3t}-e^{t}}{2t} \qquad P[X>2]=\int_2^3\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}[\,x]_2^3=\frac{1}{2}$$

2). التوزيع الأسي.

ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً، نقول إنَّ X يتوزع توزيعاً أسياً بوسيط $\lambda>0$ إذا كانت الدالة الاحتمالية له لها الشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x\ge 0\\ 0 & ; \quad x<0\end{cases}$$

حيث إنَّ التوزيع الأسي يستخدم لنمذجة الفاصل الزمني بين وقوع حدثين نادري الوقوع وتمثل $\lambda>0$ معدل وقوع الأحداث في واحدة الزمن.

مبرهنة.

ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً يتوزع توزيعاً أسياً بوسيط $\lambda>0$ ، عندئذ فإنَّ:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},V(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma_X=\frac{1}{\lambda},M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t};t<\lambda$$

أمثلة.

29. ليكن X متحولاً عشوائياً مستمراً يتوزع توزيعاً أسياً بوسيط $\lambda=2$ ، عندئذ أكتب صيغة الدالة الاحتمالية للمتحول العشوائي X وأوجد $E(X),V(X),\ \sigma_X,M_X(t)$ ، ثمَّ احسب $P[X>2],P[1<x\le 3]$.

الحل.

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & ; \quad x\ge 0\\ 0 & ; \quad x<0\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2},V(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4},\ \sigma_X=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2},M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\frac{2}{2-t};t<2$$

$$P[X>2]=\int_2^{+\infty}f(x)\,dx=\int_2^{+\infty}2e^{-2x}\,dx=\left[-e^{-2x}\right]_2^{+\infty}=-\left[0-e^{-4}\right]=e^{-4}$$

$$P[1<x\le 3]=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 2e^{-2x}\,dx=\left[-e^{-2x}\right]_1^3=-\left[e^{-6}-e^{-2}\right]=e^{-2}-e^{-6}$$